Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica 1 – Appello a.a. 2025/2026 – I turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+(\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x - \sqrt{2}}{(e^{ax^2} - \cos x)^2}.$$

$[a = 1, 2, -1, -2]$

Soluzione

Per $x \to 0$ utilizziamo gli sviluppi di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad (\sin x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Scriviamo

$$\sqrt{2+(\sin x)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{(\sin x)^2}{2}}.$$

Da

$$t = \frac{(\sin x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4), \quad \text{e} \quad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt{2+(\sin x)^2} &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^4}{32} + o(x^4)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{11}{96}x^4 + o(x^4)\right).\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{24}x^4 + o(x^4).$$

Studiamo il numeratore:

$$\begin{aligned}&\sqrt{2+(\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{11}{96}x^4\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{24}x^4\right) + o(x^4).\end{aligned}$$

I termini di ordine x^2 si cancellano e rimane

$$\sqrt{2+(\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4} x \sinh x - \sqrt{2} = -\left(\frac{11\sqrt{2}}{96} + \frac{\sqrt{2}}{24}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{5\sqrt{2}}{32}x^4 + o(x^4).$$

Passiamo ora al denominatore. Per $x \to 0$,

$$e^{ax^2} = 1 + ax^2 + \frac{a^2}{2}x^4 + o(x^4), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Pertanto

$$e^{ax^2} - \cos x = \left(a + \frac{1}{2}\right) x^2 + o(x^2),$$

e

$$(e^{ax^2} - \cos x)^2 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 x^4 + o(x^4).$$

Raccogliendo i termini principali, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5\sqrt{2}}{32}x^4 + o(x^4)}{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 x^4 + o(x^4)} = -\frac{5\sqrt{2}}{32\left(a + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2 + (\sin x)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x \sinh x - \sqrt{2}}{(e^{ax^2} - \cos x)^2} = -\frac{5\sqrt{2}}{32\left(a + \frac{1}{2}\right)^2}}$$

Esercizio 2. [10 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a\arctan(|x|) + \ln(x+1)$$

$[a = 2, 3 - 2, -3]$ specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **Non è richiesto lo studio della derivata seconda.**

SOLUZIONE

Il dominio di definizione è definito dalla disequazione

$$x + 1 > 0 \iff x \in (-1, +\infty)$$

Quindi **dominio** è $(-1, +\infty)$

• Calcolo dei limiti ed eventuali asintoti nei punti di frontiera del dominio.

Per $\boxed{x \to +\infty}$ si ha

$$f(x) = a\arctan(|x|) + \ln(x+1) = a\frac{\pi}{2}(1 + o(1)) + \ln(x)(1 + o(1)) = \ln(x)(1 + o(1)) \to +\infty$$

e non ci sono asintoti obliqui in quanto non è un infinito di ordine 1. Mentre $\boxed{x \to (-1)^+}$ si ha

$$f(x) = a\arctan(1)(1 + o(1)) + \ln(0^+)(1 + o(1)) = -\infty$$

Quindi c'è un asintoto vericale in $(-1)^+$.

• Derivabilità e monotonia. La funzione è continua in $\mathbb{R}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{a\,sgn(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{a\,sgn(x)\,(x+1) + 1 + x^2}{(1+x^2)(x+1)}$$

quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)(x+1)}(x^2 + ax + a + 1) & x > 0 \\ \frac{1}{(1+x^2)(x+1)}(x^2 - ax - a + 1) & x < 0 \end{cases}$$

Distinguiamo il segno della derivata prima in base al segno di a.

$\boxed{a = 2, 3}$. $f'(x) > 0$ per $x > 0$, mentre per $x < 0$ si ha

$$f'(x) > 0 \iff (x^2 - ax - a + 1) > 0 \iff x \in (-1, x_-)$$

dove $x_- = \frac{a - \sqrt{a^2+4a-4)}}{2}$ è la radice con determinazione negativa del polinomio $(x^2 - ax - a + 1)$ compresa nell'intervallo $(-1, 0)$. Complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} + & 0 & - & + \\ (-1, x_-) & x_- & (x_-, 0) & (0, +\infty) \end{cases}$$

quindi x_- è **massimo relativo**.

$\boxed{a = -2, -3}$. $f'(x) > 0$ sempre per $x \in (-1, 0)$, mentre per $x > 0$ si ha

$$x_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a + 1}}{2}$$

dove $x_- < 0$ mentre $x_+ > 0$. Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} + & - & 0 & + \\ (-1, 0) & (0, x_+) & x_+ & (x_+, +\infty) \end{cases}$$

quindi x_+ è un **minimo relativo**

Infine per quanto riguarda $x = 0$, dato che la funzione è continua e derivabile in un intorno di 0 per studiare la derivabilità in 0 usiamo il corollario del teorema di Lagrange:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a\, sgn(x)\,(x+1)+1+x^2}{(1+x^2)(x+1)} = a+1 = f'_+(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\, sgn(x)\,(x+1)+1+x^2}{(1+x^2)(x+1)} = -a+1 = f'_-(0)$$

Per i valori scelti di a si tratta di un **punto angoloso**. In particolare per $\boxed{a = 2, 3}$

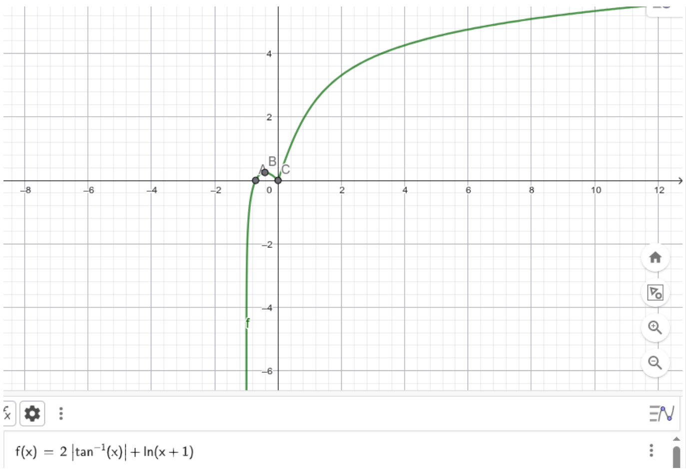
$$-a+1 = f'_-(0) < 0 \;\text{ e }\; a+1 = f'_+(0) > 0$$

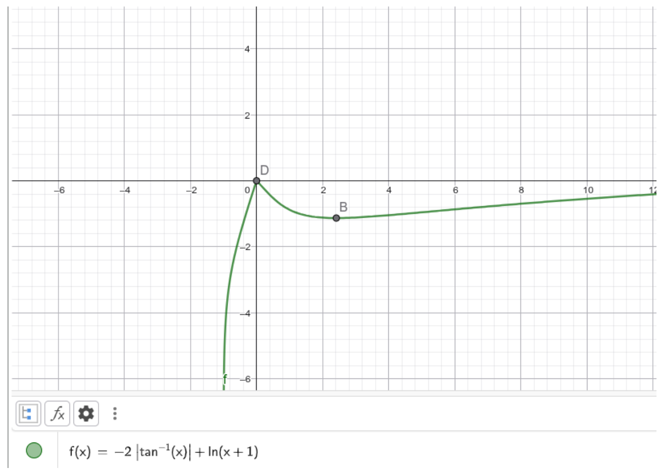
quindi $x = 0$ è **minimo relativo**. Mentre per $\boxed{a = -2, -3}$

$$-a+1 = f'_-(0) > 0 \;\text{ e }\; a+1 = f'_+(0) < 0$$

quindi $x = 0$ è **massimo relativo**

Il grafico della funzione per $a = 2$ e $a = -2$ è





Esercizio 3. [8 punti] Si studi la convergenza del seguente integrale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \frac{Ax+B}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha}\,dx.$$

Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^1 (Ax+B)\sqrt{1-x^2}dx.$$

$[(A,B) = (1,1), (-1,1), (1,2), (-1,3)]$

SOLUZIONE

Lo risolviamo nel caso $(A,B) = (1,1)$. Gli altri casi sono analoghi.

Studiamo la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{Ax+B}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha}\,dx$$

L'integrale ha problemi di convergenza in due punti:

- vicino a $x = 0$, perché $x \ln x \to 0$
- vicino a $x = 1$, perché $\ln(x)\sqrt{1-x^2} \to 0$

Spezziamo l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}(x|\log x|)^\alpha}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha}\,dx$$

Studiamo $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}(x|\log x|)^\alpha}\,dx$. Per $x \to 0^+$, abbiamo $x+1 \sim 1$ e $\sqrt{1-x^2} \sim 1$. Quindi l'integrando è asintotico a

$$\frac{1}{(x|\log x|)^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha(|\log x|)^\alpha}.$$

che converge per

$$\boxed{\alpha < 1}.$$

Studiamo $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}\,(x|\log x|)^\alpha}\,dx.$

Per $x \to 1^-$ si ha che $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$

Poniamo $x = 1-y$, allora $y \to 0^+$ e

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(1-y)^2} = \sqrt{2y}(1+o(1)).$$

Inoltre:

$$x|\ln x| = (1-y)|\ln(1-y)| \sim y.$$

Quindi $\displaystyle\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}(x|\log x|)^\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ se e solo se $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{y^{\alpha+1/2}}$ è integrabile in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ quindi se e solo se

$$\alpha + \frac{1}{2} < 1 \implies \alpha < \frac{1}{2}.$$

L'integrale converge se e solo se entrambe le condizioni sono soddisfatte:

$$\boxed{\alpha < \frac{1}{2}}.$$

Calcolo per $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{2}$

Possiamo scrivere

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}.$$

Per il secondo integrale usiamo la sostituzione

$$x = \sin\theta \implies dx = \cos\theta\,d\theta.$$

Allora

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta,$$

e l'integrale diventa

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1+\cos 2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi

$$\boxed{\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}}$$

Per le altre versioni

$$\boxed{\int_0^1 (Ax+B)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{A}{3}+\frac{B\pi}{4}}$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \cos x \, e^{\frac{1}{y}+\sin x} \\ y(0) = -\frac{1}{\log 3} \end{cases}$$

Determinare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.
[Altre file:

- $y' = -y^2 \sin x \, e^{\frac{1}{y}+\cos x}$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\log 2}$;
- $y' = y^2 \cos x \, e^{\frac{1}{y}+\sin x}$ con $y(0) = -\frac{1}{\log 2}$;
- $y' = -y^2 \sin x \, e^{\frac{1}{y}+\cos x}$, con $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\log 3}$]

Soluzione

Si noti che

$$\frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} y' = \cos x \, e^{\sin x}$$

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} y' \, dx = \int \cos x \, e^{\sin x} dx$$

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2} \, dy = \int \cos x \, e^{\sin x} dx$$

$$e^{-\frac{1}{y}} = e^{\sin x} + C$$

$$y(t) = -\frac{1}{\log(e^{\sin x} + C)}$$

Imponendo i dati iniziali $y(0) = -\frac{1}{\log 3}$ abbiamo

$$\frac{1}{\log 3} = \frac{1}{\log(e^0 + C)}$$

quindi $C = 2$. Intervallo massimale di esistenza $I = \mathbb{R}$.
Gli svolgimenti delle altre file solo analoghi.